

Метод еквівалентних фотонів

М.П. Меренков

При аналізі пружного розсіювання електронів та мюонів ми бачили, що диференціальний переріз цього процесу при розсіюванні на нульовий кут звертається в нескінченність, оскільки в цьому випадку віртуальність (квадрат 4—імпульсу) проміжного фотона, за рахунок якого здійснюється взаємодія, що обертається в нуль. Якщо цей процес супроводжуватиметься випромінюванням реального фотона, мінімальна віртуальність (за модулем) проміжного фотона вже не дорівнюватиме нулю (хоча залишиться досить малою, близько m^2), і можна знайти відповідний диференціальний переріз. При високих енергіях частинок, що стикаються, головний внесок у переріз, який набирається в області малих віртуальностей, близьких до мінімальної, буде посилено логарифмом енергії і може бути обчислений за допомогою методу еквівалентних фотонів. Цей метод називають також методом Вайцзеккера-Вільямса.

Для визначеності та різноманітності ми розглянемо застосування методу еквівалентних фотонів при розрахунку повного перерізу процесу фотонародження триплетів

$$\gamma(k) + e^-(p) \rightarrow e^-(k_1) + e^+(k_2) + e^-(p_1), \quad q = p - p_1 = k_1 + k_2 - k, \quad (1)$$

У кінематиці, що розглядається (у сфері малих віртуальностей проміжного фотона) конфігурація процесу така, що у системі спокою початкового електрона у кінцевому стані є яскраво виражений електрон віддачі з малою енергією та електронно-позитронна пара, яка забирає майже всю енергію початкового фотона. У с.ц.і. є електрон, що рухається в напрямку електронного пучка і електронно-позитронна пара, що вилітає за напрямком фотона. При цьому

$$s = (k + p)^2 \gg |q|^2, \quad m^2. \quad (2)$$

Це означає, що якщо виконані умови (2), кінцеві електрони розділені кінематично і можна відокремити електрон віддачі від електрона народженої пари. Іншими словами, немає необхідності враховувати ефекти, пов'язані із тотожністю електронів.

Оскільки утворені електрон та позитрон вилітають під малими кутами по відношенню до 3-імпульсу фотона, квадрат інваріантної цієї пари не може бути великим, а саме

$$s_1 = (k + q)^2 = (k_1 + k_2)^2 \approx \frac{\omega^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left(m^2 + \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \theta^2}{\omega^2} \right),$$

де ω — енергія фотона, ε_1 (ε_2) енергія електрона (позитрона), а θ — кут між 3-імпульсами електрона і позитрона, причому істотні значення θ порядку m/ω . Обчислимо переріз процесу (1), свідомо нехтуючи доданками порядку m^2/s $|q|^2/s$. У с.ц.і. відповідний внесок у перетин набирається в ділянці малих кутів розсіювання.

Відповідно до загальних правил диференціальний переріз процесу можна записати у вигляді

$$d\sigma = \frac{1}{4} \frac{1}{2s} |M|^2 d\Phi_{e^+e^-} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1}, \quad |M|^2 = \frac{|J_\mu j^\mu|^2}{q^4}, \quad (3)$$

де квадрат матричного елемента $|M|^2$ визначається через струми переходів $\gamma \rightarrow e^+e^-$ (J) і $e^-(p) \rightarrow e^-(p_1)$ (j), які визначаються наступним чином

$$J_\mu = -e^2 \bar{u}(k_1) \left[\gamma_\lambda \frac{\hat{q} - \hat{k}_2 + m}{(q - k_2)^2 - m^2} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{\hat{k}_1 - \hat{q} + m}{(k_1 - q)^2 - m^2} \gamma_\lambda \right] v(k_2) \varepsilon^\lambda(k),$$

$$j^\mu = -ie \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(p), \quad (4)$$

а фазовий обсяг електронно-позитронної пари визначено як

$$d\Phi_{e^+e^-} = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(k + p - k_1 - k_1 - p_1) \frac{d^3 k_1}{2\varepsilon_1} \frac{d^3 k_2}{2\varepsilon_2}.$$

У цих формулах ε_1 (ε_2)—енергія народженого електрона (позитрона), а E_1 —енергія електрона віддачі. Перевіримо насамперед, що струм J_μ задовольняє калібрувальній умові: $J_\mu q^\mu = 0$. Перший доданок у квадратних дужках у виразі $J_\mu q^\mu$ буде

$$\gamma_\lambda \frac{\hat{q} - \hat{k}_2 + m}{(q - k_2)^2 - m^2} \hat{q} = \frac{\gamma_\lambda}{q^2 - 2(k_2 q)} [q^2 - 2(k_2 q) + \hat{q}(\hat{k}_2 + m)],$$

що в обрамленні біспінорів (з урахуванням рівняння Дірака) $\bar{u}(k_1)$ і $v(k_2)$ просто дає

$$\bar{u}(k_1) \gamma_\lambda v(k_2),$$

оскільки $(\hat{k}_2 + m)v(k_2) = 0$. Другий доданок буде

$$\hat{q} \frac{\hat{k}_1 - \hat{q} + m}{(k_1 - q)^2 - m^2} \gamma_\lambda = [-q^2 + 2(k_1 q) - (\hat{k}_1 - m)\hat{q}] \frac{\gamma_\lambda}{q^2 - 2(k_1 q)},$$

$$\hat{q} \frac{\hat{k}_1 - \hat{q} + m}{(k_1 - q)^2 - m^2} \gamma_\lambda = \left[-q^2 + 2(k_1 q) - (\hat{k}_1 - m)\hat{q} \right] \frac{\gamma_\lambda}{q^2 - 2(k_1 q)},$$

що в обрамленні біспінів дає

$$-\bar{u}(k_1) \gamma_\lambda v(k_2).$$

Як видно, у сумі вони дають нуль, що й потрібно було довести. Зауважимо також, що струм J_μ є с-числовим 4-вектором (не є матрицею в спинорному просторі), тому

$$J_\mu j^\mu = -ie \bar{u}(p_1) \hat{J} u(p) \quad (5)$$

$$|M|^2 = \frac{e^2}{q^4} \text{Sp}(\hat{p}_1 + m) \hat{J} (\hat{p} + m) \hat{J}^*. \quad (6)$$

Взяття шпуру (6) дає

$$|M|^2 = \frac{4e^2}{q^4} \left[(p_1 J)(p J^*) + (p_1 J^*)(p J) + (m^2 - (p p_1))(J J^*) \right]. \quad (7)$$

При високих енергіях головний вклад $|M|^2$ дають доданки, які пропорційні величині s^2 . Щоб виділити такий внесок, нагадаємо, що утворена пара летить уздовж напрямку 3-імпульсу початкового фотона, а розсіяний електрон (електрон віддачі) летить уздовж напрямку 3-імпульсу початкового електрона. Струм J_μ будується з 4-імпульсів k , k_1 і k_2 , і тільки скалярні добутки 4-векторів (kp) , (k_1p) і (k_2p) будуть порядку $s = 2(kp)$ (скалярні добутки 4-векторів (qp) , (qk_1) , (qk_2) не дадуть у цьому випадку великого інваріанту s !) Тому у виразі (7) для $|M|^2$ можна відкинути доданки типу m^2 , (qJ) і q^2 , внаслідок чого отримуємо

$$|M|^2 = \frac{8e^2}{q^4} |(pJ)|^2. \quad (8)$$

Для опису процесів у зазначеній вище кінематиці зручно розкласти 4-імпульс проміжного фотона на складові "вздовж" 4-імпульсів початкових частинок та поперечні до них, саме

$$q = \alpha p' + \beta k + q_\perp, \quad p' = p - \frac{m^2}{2(kp)} k, \quad p'^2 = 0, \quad (q_\perp p) = (q_\perp k) = 0. \quad (9)$$

Змінні α , β і $q_\perp$ називаються змінними Судакова.

У с.ц.і. 4-вектор $q_{\perp}$ має складові тільки в площині перпендикулярної лінії зіткнення початкових частинок. Якщо цю лінію вибрати вздовж осі Z , то

$$q_{\perp} = (0, q_x, q_y, 0), \quad q_{\perp}^2 = -\mathbf{q}_{\perp}^2, \quad (10)$$

де $\mathbf{q}_{\perp}$ є двовимірним евклідовим вектором.

У диференціальний переріз (3) входить

$$\frac{d^3 p_1}{(2E_1)} = d^4 p_1 \delta(p_1^2 - m^2) = d^4 q \delta(p_1^2 - m^2).$$

Напишемо вирази для $d^4 q$ і $\delta(p_1^2 - m^2)$ у термінах змінних Судакова $(\alpha, \beta, \mathbf{q}_{\perp})$.

Очевидно

$$d^4 q = dq_0 dq_z d^2 \mathbf{q}_{\perp},$$

де у співвідношенні із (9)

$$q_0 = \frac{\sqrt{s}}{2}(\alpha + \beta), \quad q_z = \frac{\sqrt{s}}{2}(-\alpha + \beta)$$

так що

$$d q_0 d q_z = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q_0}{\partial \alpha} & \frac{\partial q_0}{\partial \beta} \\ \frac{\partial q_z}{\partial \alpha} & \frac{\partial q_z}{\partial \beta} \end{array} \right| d \alpha d \beta = \frac{1}{4} \left| \begin{array}{cc} \sqrt{s} & \sqrt{s} \\ -\sqrt{s} & \sqrt{s} \end{array} \right| d \alpha d \beta = \frac{s}{2} d \alpha d \beta. \quad (11)$$

Тому

$$d^4 q = \frac{s}{2} d\alpha d\beta d^2 \mathbf{q}_\perp, \quad d^2 \mathbf{q}_\perp = \frac{1}{2} d|\mathbf{q}_\perp|^2 d\varphi. \quad (12)$$

Інтегрування $d\alpha$ можна пов'язати з інтегруванням по квадрату інваріантної маси народженої пари s_1 , а функцію $\delta(p_1^2 - m^2)$, яка входить у фазовий обсяг електрона віддачі, можна використовувати для зняття інтегрування по $d\beta$. З цією метою виразимо p_1^2 і s_1 через змінні Судакова

$$p_1 = p - q, \quad p_1^2 - m^2 = q^2 - 2(pq) = -\mathbf{q}_\perp^2 + s\alpha\beta - s\beta - \alpha m^2, \\ s_1 = (k + q)^2 = q^2 + 2(kq) = -\mathbf{q}_\perp^2 + s\alpha\beta + s\alpha. \quad (13)$$

Умову $p_1^2 - m^2 = 0$ сформулюємо, виразивши змінну α через s_1 і β , саме

$$-\mathbf{q}_\perp^2 - s\beta + \frac{s_1 + \mathbf{q}_\perp^2}{1 + \beta} \left(\beta - \frac{m^2}{s} \right) = 0.$$

Так як $\mathbf{q}_\perp^2$, $s_1 \ll s$, останній доданок у цьому виразі малий і їм можна знехтувати. Тоді отримаємо

$$-\mathbf{q}_\perp^2 - s\beta = 0, \quad s_1 = -\mathbf{q}_\perp^2 + s\alpha, \quad (14)$$

$$\delta(p_1^2 - m^2) d\beta = \frac{1}{s}, \quad d\alpha = \frac{ds_1}{s}, \quad d^4 q \delta(p_1^2 - m^2) = \frac{1}{2s} ds_1 d^2 \mathbf{q}_\perp.$$

При написанні q^4 у знаменнику квадрата матричного елемента (8) треба бути обережнішим. Представивши q^2 таким чином, щоб змінна β входила тільки до знаменника, отримаємо

$$q^2 = -\mathbf{q}_\perp^2 + s\alpha\beta = -\mathbf{q}_\perp^2 + \frac{(-\mathbf{q}_\perp^2 - \alpha m^2)(s_1 + \mathbf{q}_\perp^2)}{s(1 - \alpha)(1 + \beta)}. \quad (15)$$

Очевидно, що у другому доданку у правій частині (15) можна знехтувати членами, які містять $\mathbf{q}_\perp^2$, тому що вони входять з малими множниками m^2/s , s_1/s , і $\mathbf{q}_\perp^2/s$. Для змінної α у чисельнику слід тому використовувати вираз $\alpha = s_1/s$, а в знаменнику знехтувати α і β в порівнянні з одиницею і тоді

$$q^2 = -\mathbf{q}_\perp^2 - m^2\left(\frac{s_1}{s}\right)^2. \quad (16)$$

Розберемося тепер із чисельником квадрата матричного елемента (8), тобто з $|(Jp)|^2$. В силу калібрувальної інваріантності, як уже показано, $(Jq) = 0$,

$$q = \alpha p' + \beta k + q_\perp, \quad p' = \frac{1}{\alpha}(q - \beta k - q_\perp).$$

Оскільки J_μ будується з 4-імпульсів k , k_1 і k_2 , то $(Jk) \sim (Jq_\perp) \sim s_1$, $(Jp) \approx (Jp') \sim s$.

Але оскільки $\beta = -\mathbf{q}_\perp^2/s$, при обчисленні (Jp) можна вважати, що

$$p = \frac{1}{\alpha}(q - q_\perp),$$

а з умови $(Jq) = 0$ маємо

$$(Jp) = -\frac{1}{\alpha}(Jq_\perp) = \frac{s}{s_1}(\mathbf{J} \mathbf{n}_\perp)|\mathbf{q}_\perp|, \quad (17)$$

де $\mathbf{n}_\perp$ одиничний евклідовий вектор у напрямку $\mathbf{q}_\perp$, так що

$$\mathbf{J} \mathbf{n}_\perp = J_x \cos \varphi + J_y \sin \varphi.$$

Це означає, що квадрат матричного елемента

$$|M|^2 = \frac{8 e^2 \mathbf{q}_\perp^2}{[\mathbf{q}_\perp^2 + m^2(s_1/s)^2]^2} \left(\frac{s}{s_1}\right)^2 |(\mathbf{J} \mathbf{n}_\perp)|^2. \quad (18)$$

Отже, ми досягли поставленої мети: виділили головний асимптотичний вклад $|M|^2$, пропорційний $(s/s_1)^2$. При цьому у чисельнику виділилися множники $q_\perp^2$ і $|(J n_\perp)|^2$, і диференціальний переріз (3) набуває наступного вигляду

$$d\sigma = \frac{\alpha}{\pi^2} \int_{4m^2}^s \frac{ds_1}{s_1} \int_0^{m^2} \frac{|q_\perp|^2 d|q_\perp|^2}{[|q_\perp|^2 + m^2(s_1/s)^2]^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{4} \frac{1}{2s_1} |(J n_\perp)|^2 d\Phi_{e^+e^-}. \quad (19)$$

Верхня межа інтегрування по $|q_\perp|^2$ написана з урахуванням того, що в кінематиці, що розглядається, ефективні значення $|q_\perp|^2 \ll m^2$. Враховуючи далі, що

$$\int_0^{2\pi} d\varphi |(J n_\perp)|^2 = \pi(|J_x|^2 + |J_y|^2),$$

$$d\sigma^{\gamma\gamma^*}(s_1, q_\perp^2) = \frac{1}{4} \frac{1}{2s_1} (|J_x|^2 + |J_y|^2) d\Phi_{e^+e^-},$$

отримаємо

$$d\sigma = \frac{\alpha}{\pi} \int_{4m^2}^s \frac{ds_1}{s_1} \int_0^{m^2} \frac{|q_\perp|^2 d|q_\perp|^2}{[|q_\perp|^2 + m^2(s_1/s)^2]^2} d\sigma^{\gamma\gamma^*}(s_1, q_\perp^2). \quad (20)$$

У логарифмічному наближенні (з урахуванням тільки доданку, що містить великий логарифм $\ln(s/m^2)$) залежністю від маси віртуального фотона у (20) у виразі для $d\sigma^{\gamma\gamma^*}(s_1, \mathbf{q}_\perp^2)$ можна знехтувати. Оскільки повний переріз процесу двофотонного народження електронно-позитронної пари спадає зі зростанням енергії принаймні як $1/s_1$, при обчисленні повного перерізу процесу (1) верхню межу інтегрування по s_1 можна покласти рівним нескінченності. Тоді отримаємо (для повного перерізу), виконавши під знаком інтеграла інтегрування $d\Phi_{e^+e^-}$

$$\sigma = \frac{2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds_1}{s_1} \sigma^{\gamma\gamma}(s_1). \quad (21)$$

Ця формула виражає основу розрахунку повного перерізу народження триплетів при високих енергіях у логарифмічному наближенні методом еквівалентних фотонів. Такого ж типу формули можуть застосовуватись і при аналізі диференціальних розподілів компонентів пари. Вони застосовні також і до інших процесів, що йдуть за рахунок обміну фотоном у t -каналі.

Обчислимо коефіцієнт при $\ln(s/m^2)$, використовуючи готову формулу для повного перерізу утворення електронно-позитронної пари при зіткненні двох фотонів (див. А.І. Ахієзер, В.Б. Берестецький, "Квантова Електродинаміка 1981р., Стор.282, (4.5.20))

$$\sigma^{\gamma\gamma} = \frac{\pi r_0^2 m^2}{\omega_0^2} \left[\left(2 + \frac{2m^2}{\omega_0^2} - \frac{m^4}{\omega_0^4} \right) \ln \left(\frac{\omega_0}{m} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{m^2} - 1} \right) - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_0^2}} \left(1 + \frac{m^2}{\omega_0^2} \right) \right], \quad (22)$$

де $r_0 = \alpha/m$ —класичний радіус електрона та

$$\omega_0^2 = \frac{1}{4}(k+q)^2 = \frac{s_1}{4}, \quad \frac{\omega_0^2}{m^2} = \frac{s_1}{4m^2}.$$

Зручно зробити заміну змінної

$$x = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s_1}}, \quad \frac{4m^2}{s_1} = 1 - x^2, \quad \frac{4m^2 ds_1}{s_1^2} = 2x dx. \quad (23)$$

При цьому

$$\ln \left(\sqrt{\frac{s_1}{4m^2}} + \sqrt{\frac{s_1}{4m^2} - 1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad 4m^2 < s_1 < \infty \rightarrow 0 < x < 1,$$

і переріз набуває вигляду

$$\sigma = 2\alpha r_0^2 \ln \frac{s}{m^2} \int_0^1 \left[x(3-x^4) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + 2x^2(x^2-2) \right] dx. \quad (24)$$

Елементарне інтегрування у правій частині (24) дає

$$\sigma(\gamma + e^- \rightarrow e^+ + e^- + e^-) = \frac{28}{9} \alpha r_0^2 \ln \frac{s}{m^2}. \quad (25)$$